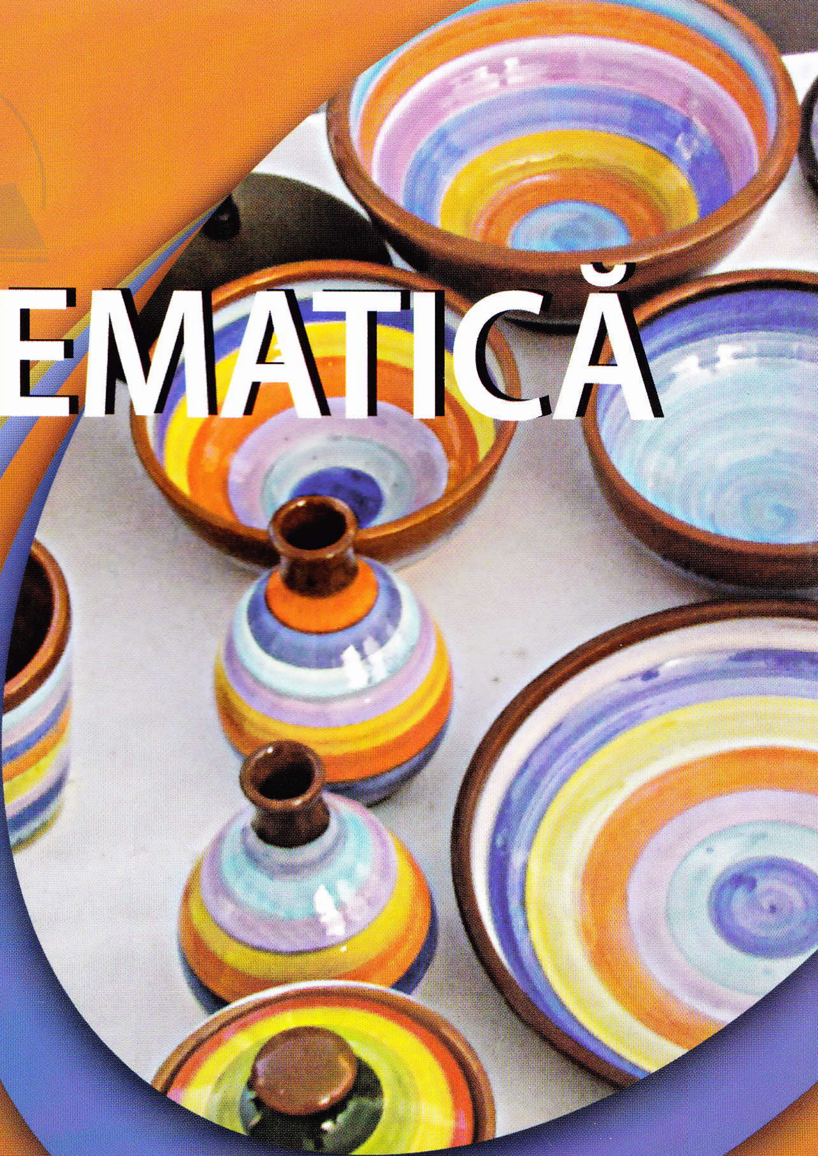
MATEMATICĂ M2



GHID pentru pregătirea examenului de BACALAUREAT

Itemi de antrenament • 70 de teste •
Modele de subiecte din sesiunile 2014-2016

Editura Nominatrix

Petre Năchilă Ana Cârstoveanu Ion Nica

MATEMATICĂ M2

Ghid pentru pregătirea examenului de Bacalaureat

- Itemi de antrenament
- 70 de teste
- Modele de subiecte din sesiunile 2014-2016

Editura NOMINATRIX

Cuprins

BREVIAR TEORETIC

CLASA a IX-a

ALGEBRĂ

I. Numere reale

- **Mulțimi finite. Reguli de numărare**

- O mulțime este ***finită*** dacă are n elemente, $n \in \mathbb{N}$.

- O mulțime este infinită dacă nu este finită.

- O mulțime $A \subset \mathbb{R}$ se numește ***mărginită*** dacă $\exists$ m, $M \in \mathbb{R}$ astfel încât $m \le x \le M$, $\forall x \in$ $\in A$.

Regula sumei: Dacă un anumit obiect A poate fi ales în m moduri, iar un alt obiect B poate fi ales în n moduri, atunci alegerea „lui A sau B“ poate fi realizată în (m + n) moduri.

Regula produsului: Dacă un obiect A se poate alege în m moduri și dacă după fiecare astfel de alegere, un obiect B se poate alege în n moduri, atunci alegerea perechii (A, B) în această ordine, poate fi realizată în $m \cdot n$ moduri.

- **Modulul unui număr real**: $|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

a) $|x| \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

b) $|-x| = |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$

c) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

d) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}^*$

e) $||x| - |y|| \le |x + y| \le |x| + |y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

f) $|x| = a$, $a > 0 \Leftrightarrow x = \pm a$

g) $|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a \Leftrightarrow x \in [-a, a]$, $a > 0$

h) $|x| \ge a \Leftrightarrow x \le -a$ sau $x \ge a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$, $a > 0$

- **Partea întreagă și partea fracționară**

- Se numește ***partea întreagă*** a numărului real x, notată [x], cel mai mare întreg mai mic sau egal cu x. Deci $[x] \in \mathbb{Z}$ și $[x] \le x < [x] + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- Se numește ***partea fracționară*** a numărului real x, notată cu {x}, diferența dintre x și partea lui întreagă. Deci $\{x\} \in [0, 1)$ și $\{x\} = x - [x]$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Proprietăți:

a) $x \in [k, k + 1)$; $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] = k$;

b) $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \{x\} = 0$;

c) $[x+n]=[x]+n, \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$;

d) $\{x+n\}=\{x\}, \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$;

e) $x-1<[x]\le x, \forall x \in \mathbb{R}$.

- **Inegalități remarcabile** (pentru două numere reale)

a) Inegalitatea mediilor: $\forall$ a, b > 0 avem:

$$\min(a,b) \le \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \max(a,b);$$

b) Inegalitatea Cauchy–Buniakovski–Schwartz:

$$a, b, x, y \in \mathbb{R}, (ax+by)^2 \le (a^2+b^2)(x^2+y^2);$$

c) Inegalitatea lui Bernoulli:

$$\alpha > 0, r > -1, r \in \mathbb{Q}, (1+\alpha)^r > 1 + r\alpha.$$

- **Principiul inducției matematice**

Propoziția p(n) este adevărată pentru $\forall n \in \mathbb{N}$ dacă sunt verificate următoarele două condiții:

1. Propoziția p(n) este adevărată pentru n = 0;
2. Din presupunerea că p(n) este adevărată pentru n = k, $k \in \mathbb{N}$ rezultă că este adevărată pentru n = k + 1.

Etapele inducției matematice

I. ***Verificarea propoziției***: pentru n = 0 verificăm dacă p(0) este adevărată;

II. ***Demonstrația***: p(k) → p(k + 1). Presupunem că p(k) este adevărată și demonstrăm că p(k + 1) este de asemenea adevărată. Dacă cele două etape sunt validate, atunci are loc

Concluzia: Propoziția p(n) este adevărată, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Formule care pot fi demonstrate prin inducție matematică:

a) $1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}, n \in \mathbb{N}^*$;

b) $1^2+2^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n \in \mathbb{N}^*$;

c) $1^3+2^3+...+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2, n \in \mathbb{N}^*$.

II. Progresii aritmetice și geometrice

- Șirul $(a_n)_{n\ge1}$ se numește **progresie aritmetică** dacă $a_1 \in \mathbb{R}$ și $a_{n+1}=a_n+r, \forall n \ge 1, r \in \mathbb{R}$, unde r se numește rația progresiei aritmetice.

Proprietăți:

a) Formula termenului general este $a_n = a_1 + (n-1)r, \forall n \ge 1$;

b) $(a_n)_{n\ge1}$ progresie aritmetică $\Leftrightarrow a_n = \dfrac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}, \forall n \ge 2$;

c) $a_1, a_2, ..., a_n$ sunt în progresie aritmetică $\Leftrightarrow a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = ... = a_k + a_{n-k+1}, \forall k=\overline{1,n}$

d) $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \dfrac{(a_1+a_n)n}{2}, \forall n \ge 1$.

- Şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ se numeşte **progresie geometrică** dacă $b_1 \in \mathbb{R}^*$ şi $b_{n+1} = b_n \cdot q, \forall\ n \geq 1$; $q \neq 0$ se numeşte raţia progresiei geometrice.

Proprietăţi:

a) Formula termenului general este $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \forall\ n \geq 1$;

b) $(b_n)_{n\geq 1}$ e progresie geometrică $\Leftrightarrow b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, \forall\ n \geq 1$;

c) $b_1, b_2, ..., b_n$ sunt în progresie geometrică $\Leftrightarrow b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = ... = b_k \cdot b_{n-k+1}, \forall\ k = \overline{1,n}$

d) $S_n = b_1 + b_2 + ... + b_n = \begin{cases} b_1 \dfrac{q^n - 1}{q-1}, q \neq 1 \\ nb_1, \quad q = 1 \end{cases}$.

III. Funcţii

- Fie $A, B \neq \emptyset$, $f: A \to B$ se numeşte funcţie definită pe A cu valori în B, dacă oricărui x din A i se asociază un unic element y din B.

A se numeşte ***domeniu de definiţie***, B se numeşte ***codomeniu***, iar f se numeşte ***lege de corespondenţă***.

- Graficul unei funcţii este mulţimea: $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$.
- ***Proprietăţi***:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numeşte funcţie **pară** dacă $f(-x) = f(x), \forall\ x \in \mathbb{R}$;

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numeşte funcţie **impară**; $f(-x) = -f(x), \forall\ x \in \mathbb{R}$;

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numeşte funcţie **periodică** dacă există $T > 0$, astfel încât $f(x + T) = f(x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$;

d) $f: A \to B$, atunci $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ se numeşte **imaginea funcţiei f**;

e) $f: A \to B$ este **crescătoare** pe $I \subseteq A$ dacă $\forall\ x_1, x_2 \in I$, cu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ sau dacă $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0$; (f este strict crescătoare pe $I \subseteq A$ dacă $\forall\ x_1 < x_2 \in I \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;

f) $f: A \to B$ este **descrescătoare** pe $I \subseteq A$ dacă $\forall\ x_1, x_2 \in I$, cu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ sau dacă $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq 0$; (f este strict descrescătoare pe $I \subseteq A$ dacă $\forall\ x_1 < x_2 \in I \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$;

g) Graficul lui $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are axă de simetrie dreapta $x = a$, dacă $f(a + x) = f(a - x)$ sau $f(x) = f(2a - x), \forall\ x \in \mathbb{R}$.

- Dacă $f: A \to B$ şi $g: B \to C$, funcţia $g \circ f: A \to C$ se numeşte compunerea lui f cu g şi $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

- Funcţia $f: A \to B$ este inversabilă dacă există o funcţie $g: B \to A$ astfel încât $g \circ f = 1_A$ şi $f \circ g = 1_B$. Funcţia g se numeşte inversa lui f şi se notează cu f^{-1}.

- **Funcţia de gradul I**

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$

Monotonia:

a) f strict crescătoare pentru a > 0;

b) f strict descrescătoare pentru a < 0;

Semnul:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
ax + b	Semn contrar lui a		0	semnul lui a	

Graficul este o dreaptă.

- **Funcţia de gradul II**

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+bx+c,\ a\in\mathbb{R}^*,\ b,c\in\mathbb{R}$

Forma canonică: $f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$;

Monotonia:

a > 0

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
f(x)		↘	$-\frac{\Delta}{4a}$	↗	

$\min f(x)=-\frac{\Delta}{4a}$ pentru $x=-\frac{b}{2a}$ şi $\operatorname{Im} f=\left[-\frac{\Delta}{4a},+\infty\right)$

a < 0

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
f(x)		↗	$-\frac{\Delta}{4a}$	↘	

$\max f(x)=-\frac{\Delta}{4a}$ pentru $x=-\frac{b}{2a}$ şi $\operatorname{Im} f=\left(-\infty,-\frac{\Delta}{4a}\right]$

Semnul:

$\Delta > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f(x)		semnul lui a	0	semn contrar lui a	0	semnul lui a	

$\Delta = 0$

x	$-\infty$		$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
f(x)		semnul lui a	0	semnul lui a	

$\Delta < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
f(x)		semnul lui a	

Graficul este o parabolă cu vârful $V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$ şi $x=-\frac{b}{2a}$ axă de simetrie.

- **Ecuații de gradul al II-lea**

$ax^2 + bx + c = 0$; $\Delta = b^2 - 4ac$; $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

- Descompunerea în factori: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$;
- Natura rădăcinilor:

$\Delta > 0 \Rightarrow x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$;

$\Delta = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \in \mathbb{R}$;

$\Delta < 0 \Rightarrow x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$.

- Relațiile lui Viete:

$S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$; $P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$; $x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$; $x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3PS$;

- Dacă se cunosc rădăcinile x_1 și x_2 ecuația de gradul al II-lea care are aceste soluții este: $x^2 - Sx + P = 0$;
- Notăm $s_n = x_1^n + x_2^n$, atunci $as_n + bs_{n-1} + cs_{n-2} = 0$.

GEOMETRIE ȘI TRIGONOMETRIE

I. Vectori în plan

- Fie A, B, C trei puncte necoliniare. Atunci:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ sau $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$;

b) Dacă $M \in BC$, astfel încât $\dfrac{MB}{CM} = k \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{k+1}\overrightarrow{AB} + \dfrac{k}{k+1}\overrightarrow{AC}$;

c) Dacă M este mijlocul lui BC $\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

- Doi vectori $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$ se numesc coliniari dacă au aceeași direcție; $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$ coliniari $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{CD}$.

- În reperul cartezian $(O, \vec{i}, \vec{j})$ considerăm punctele $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $M(x, y)$. Atunci:

a) $\vec{v} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ se numește vectorul de poziție al punctului M;

b) $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2} = |\vec{v}|$;

c) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$;

d) Notăm $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ și $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$; $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos\varphi$, unde $\varphi = \measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$ se numește produsul scalar a 2 vectori în plan;

e) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j})(x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) = x_1x_2 + y_1y_2$ pentru că $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{j} = 1$ și $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$;

f) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \cos\varphi = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$;

g) $\vec{u}$ și $\vec{v}$ coliniari $\Leftrightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\vec{u} = \alpha\vec{v} \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2}$.