

LIBRIS

MATEMATICĂ

M2



**GHID pentru pregătirea
examenului de BACALAUREAT**
Itemi de antrenament • 70 de teste •
Modele de subiecte din sesiunile 2014-2016

Editura Nominatrix



Petre Năchilă

Ana Cârstoveanu

Ion Nica

MATEMATICĂ M2

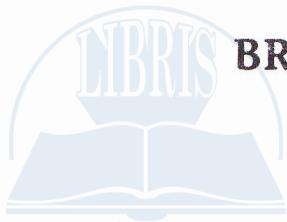
Ghid pentru pregătirea examenului de Bacalaureat

- Itemi de antrenament
- 70 de teste
- Modele de subiecte din sesiunile 2014-2016

Cuprins

PROGRAMA DE EXAMEN MATEMATICĂ – BACALAUREAT	3
BREVIAR TEORETIC	11
CLASA A IX-A	
ALGEBRĂ.....	11
I. Numere reale	11
II. Progresii aritmetice și geometrice	12
III. Funcții	13
GEOMETRIE ȘI TRIGONOMETRIE	15
I. Vectori în plan	15
II. Geometrie analitică în plan	16
III. Trigonometrie	16
CLASA A X-A	
I. Puteri cu exponent natural. Puteri cu exponent întreg negativ. Puteri cu exponent rațional. Puteri cu exponent real	18
II. Radicalul de ordin n	18
III. Logaritmi	19
IV. Forma algebrică a unui număr complex. Numere complexe conjugate. Modulul unui număr complex	20
V. Funcții injective. Funcții surjective. Funcții bijective. Funcții inversabile. Funcția putere cu exponent natural. Funcția radical de ordinul n. Funcția exponențială. Funcția logaritmică. Funcția sinus. Funcția arcsinus. Funcția cosinus. Funcția arccosinus. Funcția tangentă. Funcția arctangentă. Funcția cotangentă. Funcția arccotangentă	21
VI. Ecuații trigonometrice	27
VII. Permutări. Aranjamente. Combinări. Binomul lui Newton	28
CLASA A XI-A	
I. Matrice	30
II. Determinanți	31
III. Sisteme de ecuații liniare	33
IV. Limite de funcții	35
V. Funcții continue	39
VI. Funcții derivabile. Aplicații ale derivatelor în studiul ecuațiilor și funcțiilor. Reprezentarea grafică a funcțiilor	41
CLASA A XII-A	
ALGEBRĂ.....	49
I. Legi de compozиție	49
II. Structuri algebrice	49
III. Polinoame	51
ANALIZĂ MATEMATICĂ	53
I. Formula de integrare prin părți	53
II. Teorema de schimbare de variabilă	53
III. Integrarea funcțiilor raționale	54
IV. Integrale definite	55

ITEMI DE ANTRENAMENT	57
Numere reale	57
Progresii	59
Funcții	61
Vectori în plan. Geometrie analitică în plan.....	65
Trigonometrie	67
Multimea numerelor complexe	69
Funcții și ecuații	70
Elemente de combinatorică	72
Matematici financiare	75
Elemente de calcul matriceal și sisteme de ecuații liniare.....	76
Funcții continue și funcții derivabile.....	80
Grupuri. Inele și corpuri. Inele de polinoame	85
Primitive. Integrale definite	92
TESTE RECAPITULATIVE.....	94



BREVIAR TEORETIC

CLASA a IX-a

ALGEBRĂ

I. Numere reale

- **Mulțimi finite. Reguli de numărare**

- O mulțime este **finită** dacă are n elemente, $n \in \mathbb{N}$.
- O mulțime este infinită dacă nu este finită.
- O mulțime $A \subset \mathbb{R}$ se numește **mărginită** dacă $\exists m, M \in \mathbb{R}$ astfel încât $m \leq x \leq M, \forall x \in A$.

Regula sumei: Dacă un anumit obiect A poate fi ales în m moduri, iar un alt obiect B poate fi ales în n moduri, atunci alegerea „lui A sau B “ poate fi realizată în $(m + n)$ moduri.

Regula produsului: Dacă un obiect A se poate alege în m moduri și dacă după fiecare astfel de alegere, un obiect B se poate alege în n moduri, atunci alegerea perechii (A, B) în această ordine, poate fi realizată în $m \cdot n$ moduri.

- **Modulul unui număr real:** $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

- a) $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- b) $|-x| = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$
- c) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$
- d) $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^*$
- e) $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$
- f) $|x| = a, a > 0 \Leftrightarrow x = \pm a$
- g) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \Leftrightarrow x \in [-a, a], a > 0$
- h) $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ sau $x \geq a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty), a > 0$

- **Partea întreagă și partea fracționară**

- Se numește **partea întreagă** a numărului real x , notată $[x]$, cel mai mare întreg mai mic sau egal cu x . Deci $[x] \in \mathbb{Z}$ și $[x] \leq x < [x] + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

- Se numește **partea fracționară** a numărului real x , notată cu $\{x\}$, diferența dintre x și partea lui întreagă. Deci $\{x\} \in [0, 1)$ și $\{x\} = x - [x], \forall x \in \mathbb{R}$.

Proprietăți:

- a) $x \in [k, k + 1); k \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] = k;$
- b) $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \{x\} = 0;$

- c) $[x+n] = [x] + n$, $\forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$;
d) $\{x+n\} = \{x\}$, $\forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$;
e) $x - 1 < [x] \leq x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

• **Inegalități remarcabile (pentru două numere reale)**

a) Inegalitatea mediilor: $\forall a, b > 0$ avem:

$$\min(a, b) \leq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \max(a, b);$$

b) Inegalitatea Cauchy–Buniakovski–Schwartz:

$$a, b, x, y \in \mathbb{R}, (ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2);$$

c) Inegalitatea lui Bernoulli:

$$\alpha > 0, r > -1, r \in \mathbb{Q}, (1+\alpha)^r > 1 + r\alpha.$$

• **Principiul inducției matematice**

Propoziția $p(n)$ este adevărată pentru $\forall n \in \mathbb{N}$ dacă sunt verificate următoarele două condiții:

1. Propoziția $p(n)$ este adevărată pentru $n = 0$;
2. Din presupunerea că $p(n)$ este adevărată pentru $n = k$, $k \in \mathbb{N}$ rezultă că este adevărată pentru $n = k + 1$.

Etapele inducției matematice

I. **Verificarea propoziției**: pentru $n = 0$ verificăm dacă $p(0)$ este adevărată;

II. **Demonstrația**: $p(k) \rightarrow p(k + 1)$. Presupunem că $p(k)$ este adevărată și demonstrăm că $p(k + 1)$ este de asemenea adevărată. Dacă cele două etape sunt validate, atunci are loc

Concluzia: Propoziția $p(n)$ este adevărată, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Formule care pot fi demonstreate prin inducție matematică:

a) $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

b) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

c) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$, $n \in \mathbb{N}^*$.

II. Progresii aritmetice și geometrice

- Sirul $(a_n)_{n \geq 1}$ se numește **progresie aritmetică** dacă $a_1 \in \mathbb{R}$ și $a_{n+1} = a_n + r$, $\forall n \geq 1$, $r \in \mathbb{R}$, unde r se numește **rația progresiei aritmetice**.

Proprietăți:

a) Formula termenului general este $a_n = a_1 + (n-1)r$, $\forall n \geq 1$;

b) $(a_n)_{n \geq 1}$ progresie aritmetică $\Leftrightarrow a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, $\forall n \geq 2$;

c) a_1, a_2, \dots, a_n sunt în progresie aritmetică $\Leftrightarrow a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \dots = a_k + a_{n-k+1}$, $\forall k = \overline{1, n}$

d) $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$, $\forall n \geq 1$.

- Sirul $(b_n)_{n \geq 1}$ se numește progresie geometrică dacă $b_1 \in \mathbb{R}^*$ și $b_{n+1} = b_n \cdot q$, $\forall n \geq 1$; $q \neq 0$ se numește rația progresiei geometrice.

Proprietăți:

a) Formula termenului general este $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, $\forall n \geq 1$;

b) $(b_n)_{n \geq 1}$ e progresie geometrică $\Leftrightarrow b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, $\forall n \geq 1$;

c) b_1, b_2, \dots, b_n sunt în progresie geometrică $\Leftrightarrow b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = \dots = b_k \cdot b_{n-k+1}$, $\forall k = \overline{1, n}$

d) $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = \begin{cases} b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, & q \neq 1 \\ nb_1, & q = 1 \end{cases}$

III. Funcții

- Fie $A, B \neq \emptyset$, $f: A \rightarrow B$ se numește funcție definită pe A cu valori în B , dacă oricărui x din A i se asociază un unic element y din B .

A se numește **domeniu de definiție**, B se numește **codomeniu**, iar f se numește **lege de corespondență**.

• Graficul unei funcții este mulțimea: $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$.

Proprietăți:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se numește funcție pară dacă $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se numește funcție impară; $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se numește funcție periodică dacă există $T > 0$, astfel încât $f(x + T) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

d) $f: A \rightarrow B$, atunci $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ se numește imaginea funcției f ;

e) $f: A \rightarrow B$ este crescătoare pe $I \subseteq A$ dacă $\forall x_1, x_2 \in I$, cu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ sau dacă $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0$; (f este strict crescătoare pe $I \subseteq A$ dacă $\forall x_1 < x_2 \in I \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$);

f) $f: A \rightarrow B$ este descrescătoare pe $I \subseteq A$ dacă $\forall x_1, x_2 \in I$, cu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ sau dacă $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq 0$; (f este strict descrescătoare pe $I \subseteq A$ dacă $\forall x_1 < x_2 \in I \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$);

g) Graficul lui $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are axă de simetrie dreapta $x = a$, dacă $f(a + x) = f(a - x)$ sau $f(x) = f(2a - x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

• Dacă $f: A \rightarrow B$ și $g: B \rightarrow C$, funcția $g \circ f: A \rightarrow C$ se numește compunerea lui f cu g și $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

• Funcția $f: A \rightarrow B$ este inversabilă dacă există o funcție $g: B \rightarrow A$ astfel încât $g \circ f = 1_A$ și $f \circ g = 1_B$. Funcția g se numește inversă lui f și se notează cu f^{-1} .

Funcția de gradul I

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$

Monotonie:

- a) f strict crescătoare pentru $a > 0$;
- b) f strict descrescătoare pentru $a < 0$;

Semnul:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	semn contrar lui a	0	semnul lui a

Graficul este o dreaptă.

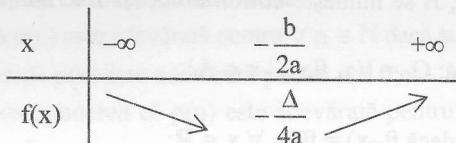
• Funcția de gradul II

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, a \in \mathbb{R}^*, b, c \in \mathbb{R}$$

Forma canonica: $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a};$

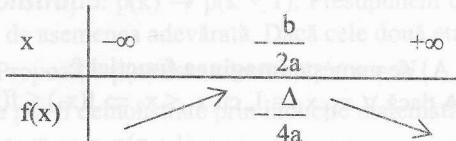
Monotonie:

$$a > 0$$



$$\min f(x) = -\frac{\Delta}{4a} \text{ pentru } x = -\frac{b}{2a} \text{ și } \text{Im } f = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$$

$$a < 0$$



$$\max f(x) = -\frac{\Delta}{4a} \text{ pentru } x = -\frac{b}{2a} \text{ și } \text{Im } f = \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$$

Semnul:

$$\Delta > 0$$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f(x)$	semnul lui a	0	semn contrar lui a	0 semnul lui a

$$\Delta = 0$$

x	$-\infty$	$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	semnul lui a	0	semnul lui a

$$\Delta < 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	semnul lui a	

Graficul este o parabolă cu vârful $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ și $x = -\frac{b}{2a}$ axă de simetrie.

• **Ecuării de gradul al II-lea**

$$ax^2 + bx + c = 0; \Delta = b^2 - 4ac; x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Descompunerea în factori: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$;

- Natura rădăcinilor:

$$\Delta > 0 \Rightarrow x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R};$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \in \mathbb{R};$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow x_1, x_2 \notin \mathbb{R}.$$

- Relațiile lui Viete:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}; x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P; x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3PS;$$

- Dacă se cunosc rădăcinile x_1 și x_2 ecuația de gradul al II-lea care are aceste soluții este:

$$x^2 - Sx + P = 0;$$

- Notăm $s_n = x_1^n + x_2^n$, atunci $as_n + bs_{n-1} + cs_{n-2} = 0$.

GEOMETRIE ȘI TRIGONOMETRIE

I. Vectori în plan

• Fie A, B, C trei puncte necoliniare. Atunci:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ sau $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$;

b) Dacă M ∈ BC, astfel încât $\frac{MB}{CM} = k \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{k+1} \overrightarrow{AB} + \frac{k}{k+1} \overrightarrow{AC}$;

c) Dacă M este mijlocul lui BC $\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

• Doi vectori \overrightarrow{AB} și \overrightarrow{CD} se numesc coliniari dacă au aceeași direcție; \overrightarrow{AB} și \overrightarrow{CD} coliniari $\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{AB} = \alpha \overrightarrow{CD}$.

• În reperul cartezian (O, \vec{i}, \vec{j}) considerăm punctele A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), M(x, y). Atunci:

a) $\vec{v} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ se numește vectorul de poziție al punctului M;

b) $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2} = |\vec{v}|$;

c) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$;

d) Notăm $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ și $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$; $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos \varphi$, unde $\varphi = \angle(\vec{u}, \vec{v})$ se numește produsul

scalar a 2 vectori în plan;

e) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j})(x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) = x_1x_2 + y_1y_2$ pentru că $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{j} = 1$ și $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$;

f) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \cos \varphi = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$;

g) \vec{u} și \vec{v} coliniari $\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\vec{u} = \alpha \vec{v} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$.